Matemática Discreta

Combinatoria

Combinatoria

Por Juan José Moreno

Contenidos

1. Nociones generales
   - Reglas de la suma y del producto
   - Principio de inclusión–exclusión
   - Principio del palomar
2. Patrones usuales de conteo
   - Ordenaciones: permutaciones
   - Subconjuntos ordenados: variaciones
   - Subconjuntos: combinaciones. Números combinatorios.
   - Repartos: combinaciones con repetición

Aplicaciones prácticas:

- Estimar la probabilidad de hacerse rico: lotería, bonoloto, etc.
- ¿Cuántos números puedo representar en un procesador de 32 bits?
- Estimar la memoria necesaria para realizar un programa.
- ¿Cuántas matriculas se pueden generar con el sistema actual?
- ¿Cuántos posibles números IP hay?

Principio del producto

Proposición 1 (Principio del producto v1) *Supongamos que una tarea se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay n_1 maneras posibles de realizar la primera y n_2 formas de hacer la segunda tarea después de que la primera haya sido realizada, entonces hay $n_1 n_2$ formas de completar la tarea.*

Ejemplos:

- ¿Cuántas cadenas de bits diferentes hay de longitud 7?
- ¿Cuántas matrículas se pueden obtener si cada una contiene 3 letras seguidas de 3 dígitos?
- Se consideran los números de 5 cifras. Calcular:
  - El número de impares y su suma.
  - El número de los que tienen todas sus cifras distintas. ¿Cuántos son impares?
  - El número de capicúas y su suma.
- ¿Cuántas funciones se pueden definir entre un conjunto de m elementos y otro de n elementos? ¿Cuántas de ellas son inyectivas?
- ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos?

Principio del producto

Proposición 2 (Principio del producto v2) *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *son conjuntos finitos, entonces se tiene que:*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m| = \prod_{k=1}^{m} |A_k| .$$

Definición 3

Si A *y* B *son dos conjuntos, su producto cartesiano es el conjunto:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} .$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{a, b, c\} \\ A \times B &= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\} \end{aligned}$$

Principio de la suma

Proposición 4 (Principio de la suma v1) *Si una tarea se puede hacer de n_1 formas y una segunda tarea se puede hacer de n_2 formas y ambas tareas son incompatibles, entonces hay $n_1 + n_2$ formas de realizar una de las dos tareas.*

Ejemplos:

- La biblioteca de una universidad tiene 40 libros de texto sobre `html` y 50 libros sobre `tcp/ip`. ¿Cuántos libros de texto puede escoger un estudiante interesado en cualquiera de estas dos materias?
- Un estudiante puede escoger un proyecto fin de carrera de entre tres listas. Cada una de ellas contiene respectivamente 23, 15 y 19 propuestas. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?

Principio de la suma

Proposición 5 (Principio de la suma v2) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, se tiene que:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \;=\; |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| \;=\; \sum_{j=1}^{m} |A_j|\,.$$

Definición 6

Dos conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, a\} \\ B &= \{1, a, b, c\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, a, b, c\} \\ A \cap B &= \{1, a\} \end{aligned}$$

Más ejemplos

Problema 1

¿Cuántos números de tres cifras mayores de 500 *y pares se pueden escribir con los dígitos* 2, 3, 4, 5 *y* 6*?*

Problema 2

¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar en seis butacas consecutivas tres chicos y tres chicas de manera que no haya dos chicos ni dos chicas consecutivas?

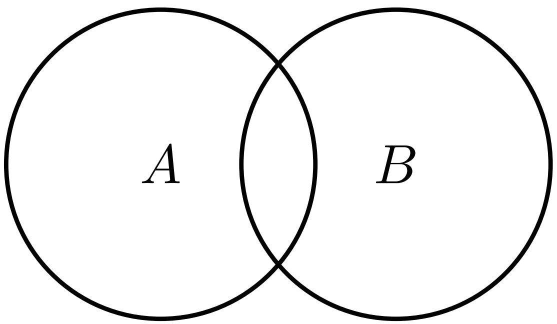
Problema 3

- *¿Cuántas cadenas de bits hay de longitud ocho?*
- *¿Cuántas de longitud diez empiezan y acaban por* 1*?*
- *¿Cuántas tienen longitud menor o igual que seis?*

Repaso principio de inclusión-exclusión

Proposición 7 (Principio de inclusión-exclusión v1)

$$|A \cup B| \;=\; |A| + |B| - |A \cap B|$$



$|A| + |B|$ cuenta dos veces el conjunto $A \cap B$.

Si A y B son disjuntos $\Rightarrow$ Regla de la suma.

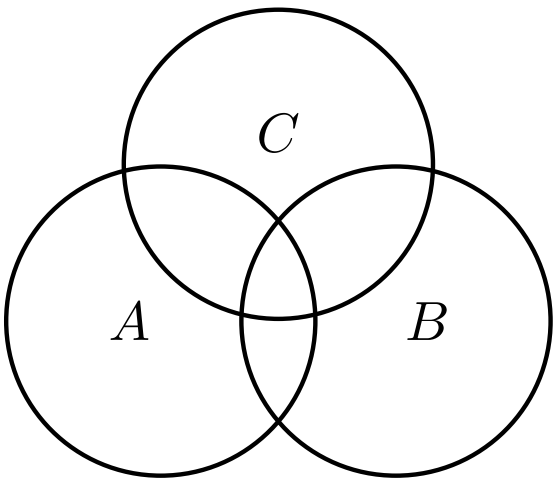
Ejemplos:

- ¿Cuántas cadenas de 10 bits o bien comienzan por 000 ó bien acaban en 00?
- ¿Cuántos enteros positivos ≤ 100 ó bien son divisibles por 4 ó bien por 6?

Repaso principio de inclusión-exclusión

Proposición 8 (Principio de inclusión-exclusión v2)

$$|A \cup B \cup C| \;=\; |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$|A| + |B| + |C|$ cuenta:

dos veces cada intersección de 2 conjuntos,

tres veces la intersección de los 3 conjuntos.

Al quitar $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$ nos falta $|A \cap B \cap C|$

Ejemplo:

- Determinar el número de enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 100$ y n no sea múltiplo de 2, 3 y 5.

Repaso principio de inclusión-exclusión

Proposición 9 (Principio de inclusión exclusión v3)

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \;&=\; \sum_{1\le i\le n} |A_i| \;-\; \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \\
&+\; \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \;-\; \cdots \\
&+\; (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Proposición 10 (Principio de inclusión exclusión v4) *Sean* $A_i \subset S$ *con* $1 \le i \le n$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| \;&=\; |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\
&=\; |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|\,.
\end{aligned}$$

Notas:

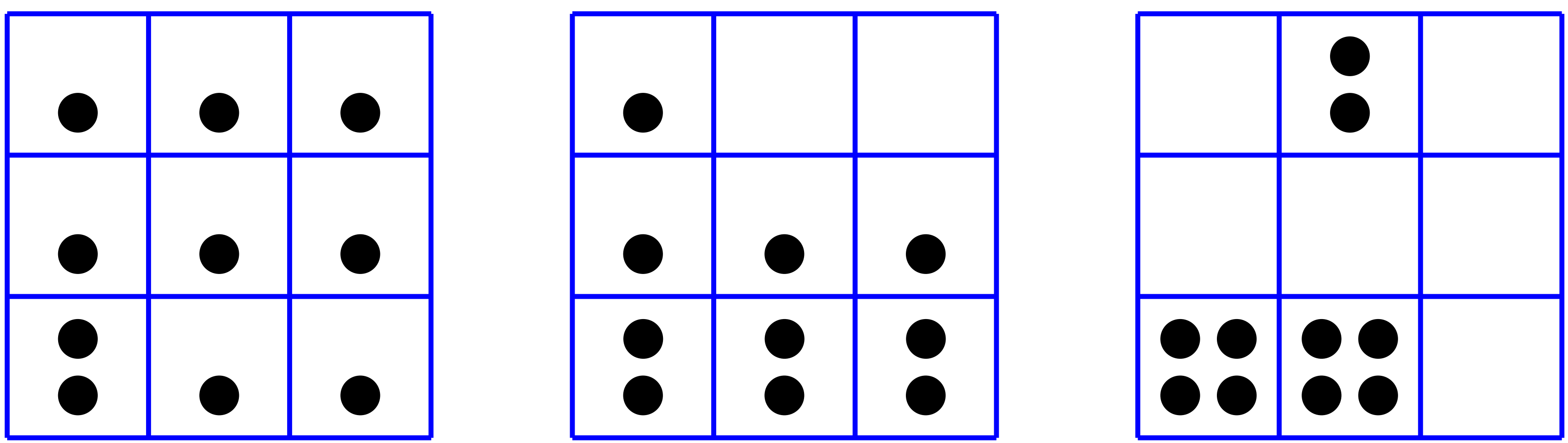
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} = \{x \mid x \notin A_1\,, x \notin A_2\,, \ldots\,, x \notin A_n\}$
- $\overline{A} = S \setminus A \;\Rightarrow\; |\overline{A}| = |S| - |A|$

Repaso principio del palomar

Proposición 11 (Principio del palomar v1) *Si $k+1$ ó más objetos se colocan en k cajas, existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que ninguna de las k cajas tiene más de un objeto. Entonces el número de éstos será como mucho k, lo que contradice la hipótesis de partida. $\square$

Ejemplo: $k = 9$



Ejemplos:

- En un grupo de 367 personas debe haber al menos dos que cumplan los años el mismo día.
- En cualquier grupo de 28 palabras en español debe haber al menos dos que comiencen por la misma letra.
- ¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos reciben la misma nota en un examen puntuado entre 0 y 100?

Proposición 12 (Principio del palomar generalizado) *Si se colocan N objetos en k cajas, existe al menos una caja con al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.*

Nota: para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = y \in \mathbb{Z}$ tal que $y \geq x$ con $y = \min_{z \in \mathbb{Z}} |z - x|$.

$$\frac{2}{5} = 0.4 \Rightarrow \left\lceil \frac{2}{5} \right\rceil = 1$$

$$-\frac{2}{5} = -0.4 \Rightarrow \left\lceil -\frac{2}{5} \right\rceil = 0$$

Repaso principio del palomar

Ejemplos:

- En un grupo de 100 personas hay al menos $\lceil 100/12 \rceil$ que nacieron el mismo mes.
- ¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos seis reciben la misma nota en un examen puntuado con las notas SS, A, N, SB, MH?
- ¿Cuántas cartas deben ser seleccionadas de una baraja española de 40 cartas para garantizar que la menos 3 son del mismo palo?

Más ejemplos

Problema 4
Encontrar cuántos números de cinco dígitos se pueden formar con el conjunto $\{1,2,3\}$ *tales que aparezcan los tres dígitos (es decir, que cada dígito aparezca al menos una vez).*

Problema 5
Determinar el número de enteros $1 \leq n \leq 100$ *tal que* n *no sea múltiplo de 2, 3 y 5.*

Problema 6
Encontrar el número de palabras de cinco letras que se pueden formar usando el alfabeto inglés (26 letras) de manera que no haya dos letras consecutivas iguales.

Problema 7

- *¿Cuántas cadenas de bits de longitud menor o igual que* $n \in \mathbb{N}$ *están formadas únicamente por unos?*
- *¿Cuántas cadenas de bits de longitud* 7 *o bien empiezan por dos ceros o bien acaban por tres unos?*
- *Un* **palíndromo** *es una cadena de bits que al invertirse es idéntica a sí misma (por ejemplo* 0010110100*). ¿Cuántas cadenas de bits de longitud* n *son palíndromos?*

Más ejemplos

Problema 8

Una cesta contiene 10 bolas rojas y 10 bolas negras. Se eligen al azar, a oscuras sin ver su color y sin reemplazarlas tras haberlas sacado.

1. *¿Cuántas bolas deben sacarse para estar seguros de tener al menos tres bolas del mismo color?*
2. *¿Cuántas bolas deben sacarse para estar seguros de que hay al menos tres bolas negras?*

Definición 13
Si $n \in \mathbb{N}$, se define el **factorial de n** *como* $n! \; = \; n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$

Proposición 14 (Permutaciones de n objetos) *n objetos diferentes se pueden ordenar de $n!$ maneras distintas.*

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 10 personas en fila?

Proposición 15 (Permutaciones con repetición) *El número de maneras distintas de ordenar n objetos clasificados en k grupos de objetos idénticos entre sí (con n_1 elementos el primero, n_2 elementos el segundo, etc) es*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \equiv \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \; = \; n\,.$$

- ¿Cuántas palabras de 11 letras se pueden formar con $a, a, a, a, a, b, b, b, c, d, d$?
- ¿Cuántas permutaciones de los símbolos S_1, S_2, S_3, S_4 tienen a S_1 y S_2 consecutivos y en ese orden?
- ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al barajar un baraja española de 40 cartas? ¿Y al barajar juntas dos barajas españolas?

Patrones de conteo: Subconjuntos ordenados

Proposición 16 (Variaciones de r objetos tomados de entre n) *Dado un conjunto de n elementos diferentes podemos extraer*

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \;=\; \frac{n!}{(n-r)!} \;\equiv\; V(n,r)$$

subconjuntos ordenados de r elementos.

Observación: $V(n,n) = n!$ si defino $0! = 1$.

Ejemplos:

- En una carrera entre 7 atletas, ¿de cuántas maneras se pueden atribuir las medallas de oro, plata y bronce?
- Se seleccionan 4 cartas secuencialmente de una baraja francesa de 52 cartas. Encontrar la probabilidad de:
  - Tener cuatro ases.
  - Tener todas las cartas del mismo palo.

Regla de Laplace: $\quad \text{Probabilidad} = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

Patrones de conteo: Subconjuntos ordenados

Proposición 17 (Variaciones con repetición) *Dado un conjunto de n elementos diferentes, podemos extraer n^r subconjuntos ordenados de r elementos si permitimos repeticiones.*

Ejemplos:

- La combinación de un candado tiene 5 dígitos.
  - ¿Cuál es el número de combinaciones posibles?
  - ¿Cuál es el número de combinaciones posibles si los números han de ser distintos?
  - ¿Cuál es el número de combinaciones si cada cifra tiene que ser distinta de la anterior?
- Un barco dispone de 12 banderas distintas y puede izar hasta 3 en su mástil de señales para indicar alguna circunstancia del barco.
  - ¿Cuántos estados diferentes pueden describirse?
  - ¿Cuántos estados diferentes pueden describirse si el barco dispone de 3 juegos iguales de banderas?

Resumen: cadenas

Problema Estándar 1 (Variaciones con repetición)

El número de cadenas de longitud N que se pueden formar con k elementos distintos es k^N.

Problema Estándar 2 (Variaciones)

El número de cadenas de longitud N que se pueden formar con k elementos distintos de manera que ninguno aparezca más de una vez es

$$k(k-1)\cdots(k-N+1) \;=\; \frac{k!}{(N-k)!} \;=\; V(k,N)\,.$$

Caso particular (Permutaciones): Si $N=k$, hay $= N!$ reordenaciones de una cadena de longitud N (con elementos diferentes).

Problema Estándar 3 (Permutaciones con repetición)

El número de cadenas de longitud n que se pueden formar con k elementos distintos de manera que el primero aparezca n_1 veces, el segundo n_2 veces, etc es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \;\equiv\; \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\,, \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \;=\; n\,.$$

Patrones de conteo: subconjuntos

El término combinación se aplica a una lista de elementos cuando el orden no importa.

Proposición 18 (Combinaciones de r elementos tomados de entre n) *El número de subconjuntos distintos que contengan r elementos que pueden extraerse de un conjunto de n elementos diferentes es*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.$$

Números combinatorios o coeficientes binomiales: $\binom{n}{r}$ donde $n, r \in \mathbb{Z}_+$ y $n \geq r \geq 0$.

Ejemplos:

- En una bonoloto cada apuesta consiste en elegir seis números del 1 al 49 sin importar el orden. ¿Cuál es el número de apuestas posibles?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en la bonoloto anterior el conjunto de números ganadores de una semana sea disjunto del conjunto de números ganadores de otra semana?

Más ejemplos

- Calcular el número de combinaciones de 2 letras que se pueden formar con el conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ tales que:
  1. No se repite ninguna letra.
  2. Las letras pueden repetirse.
- ¿Cuántas combinaciones hay de tres letras con las restricciones anteriores?
- ¿Cuántas secuencias binarias de longitud 12 tienen exactamente seis 0's? ¿Cuántas tienen más 0's que 1's?
- ¿Cuántas manos distintas de 5 cartas puede recibir un jugador de póquer?
- ¿Cuántas maneras hay de elegir tres espadas y dos copas de una baraja española?
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir las 40 cartas de una baraja española en dos montones iguales de manera que haya dos ases en cada montón? ¿Y si un montón tiene 10 cartas y el otro 30?
- Se lanzan sucesivamente 6 monedas. ¿En cuántos casos se obtienen 4 caras y dos cruces?
- ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer en la bonoloto? Si se marcan 10 números, ¿cuántas apuestas se han realizado?

Números combinatorios

Definición 19 (Números combinatorios)
Para todo $n, r \in \mathbb{Z}_+$ tales que $0 \leq r \leq n$ definimos el *número combinatorio* $\binom{n}{r}$ *como*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,,$$

donde por convenio definimos $0! = 1$.

El valor numérico de los números combinatorios coincide con los elementos del Triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{\text{fila}}{\text{columna}}$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\
 & a+b &
\end{tikzcd}
$$

Números combinatorios

Teorema 20

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq r \leq n$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

Teorema 21 (Identidad de Pascal)

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \quad n \geq 0, \quad 0 < r \leq n$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right] = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}$$

Teorema 22 (Teorema del binomio de Newton)

$$(x+y)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}\,, \quad n \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN: Al expandir $(x+y)^n$ sólo tengo términos del tipo $x^k y^{n-k}$ con $k = 0, \ldots, n$. El número de términos del tipo $x^k y^{n-k}$ con k fija es igual al número de maneras de escoger k x's [y $(n-k)$ y's], luego es igual a $\binom{n}{k}$. $\square$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}$$

Números combinatorios

Corolario 23

$$(1+x)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,, \quad n \geq 0$$

Ejemplo:

$$1 + \binom{10}{1} 2 + \binom{10}{2} 2^2 + \ldots + \binom{10}{10} 2^{10} = (1+2)^{10} = 3^{10}$$

Corolario 24 *Para todo $n \geq 0$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \;=\; 2^n\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} \;=\; 0\,.$$

Ejemplos:

- Encontrar el número de maneras de colocar tres A's y siete B's de manera que no haya dos A's consecutivas.
- Generalización: Encontrar el número de cadenas de bits que puedo formar con m ceros y n unos y tales que no haya dos unos consecutivos.
- Encontrar el número de maneras de seleccionar tres cifras distintas del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ y tales que no haya dos cifras consecutivas?

Números combinatorios

Teorema 25 (Identidad de Vandermonde) *Para todo $n, m \geq 0$ y $0 \leq k \leq m+n$ se cumple que*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{q=0}^{k} \binom{m}{k-q}\binom{n}{q}.$$

Observación: $\binom{n}{k} = 0$ para todo $n, k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $k > n$.

Problemas:

- Probar que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$
- Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k}\binom{n-1}{m-k-1} = \binom{n+m-1}{n}.$

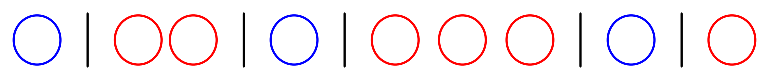
Patrones de conteo: repartos

Proposición 26 (Repartos) *Si hay que repartir r objetos iguales en n grupos y todos los grupos deben de contar con algún objeto, entonces existen*

$$\binom{r-1}{n-1}$$

repartos distintos.

DEMOSTRACIÓN: Cada reparto tiene la siguiente forma (por ejemplo con $r = 9$ y $n = 6$)



Podemos poner las $n-1$ barras (que delimitan los n grupos) en cualquiera de las $r-1$ posibles posiciones. Luego, el número de repartos es el indicado arriba. En el caso anterior se trata de colocar 5 barras separadoras en 8 posiciones posibles, con lo que tendremos $\binom{8}{5}$ posibles maneras.

Patrones de conteo: repartos

Proposición 27 (Combinaciones con repetición) *Si hay que repartir r objetos iguales en n grupos, entonces existen*

$$\binom{n+r-1}{r}$$

repartos distintos.

DEMOSTRACIÓN: Cada reparto tiene la siguiente forma (por ejemplo con $r = 9$ y $n = 7$)

$$\color{blue}{\times} \mid \color{red}{\times\times} \mid\mid \color{blue}{\times} \mid \color{red}{\times\times} \mid \color{blue}{\times} \mid \color{red}{\times\times}$$

Podemos poner las $n-1$ barras (que delimitan los n grupos) en cualquiera de las $r+n-1$ posibles posiciones. Luego, el número de repartos es

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}. \qquad \square$$

Ejemplos

- Si se lanzan simultáneamente 6 dados iguales, ¿cuántos resultados son posibles?
- Al marcar en un calendario las fechas de cumpleaños de r personas, ¿cuántas configuraciones diferentes se pueden obtener?
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir r bolas idénticas en n urnas de manera que una urna prefijada contenga exactamente $k \leq r$ bolas?
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir r bolas en n urnas de manera que k de ellas estén vacías?
- ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 2 bolas blancas y 3 bolas negras de manera que haya 2 rachas de bolas negras?
- Generalización: ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila a bolas blancas y b bolas negras de manera que haya $k+1$ rachas de bolas negras?

Resumen: Combinaciones

Problema Estándar 4 (Combinaciones)
El número posible de combinaciones de tamaño k consistentes en elementos distintos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.

Problema Estándar 5
El número de cadenas que puedo formar con m 0's y n 1's y tales que no haya dos 1's consecutivos es $\binom{m+1}{n}$.

Problema Estándar 6
El número de combinaciones de k elementos elegidos de entre n elementos permitiendo que haya repeticiones y tal que aparezcan todos ellos es $\binom{k-1}{n-1}$.

Problema Estándar 7 (Combinaciones con repetición)
El número de combinaciones de k elementos elegidos de entre n elementos permitiendo que haya repeticiones es $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$.

Resumen: Métodos para elegir r de entre n

	Con Orden	Sin Orden
Sin Repetición	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$\dbinom{n}{r}$
Con Repetición	n^r	$\dbinom{n+r-1}{r}$

Patrones de conteo: particiones de un conjunto

Proposición 28 *Sea un conjunto S de $m \cdot n$ elementos. Entonces S puede romperse en n conjuntos de m elementos de*

$$\frac{(m \cdot n)!}{(m!)^n \, n!}$$

maneras distintas.

DEMOSTRACIÓN: Queremos repartir $m \cdot n$ elementos en n cajas distintas de manera que en cada una de ellas haya m elementos y que el orden no importe. Luego hay

$$\frac{(n \cdot m)!}{\underbrace{m!m! \cdots m!}_{n \text{ términos}}} = \frac{(n \cdot m)!}{(m!)^n}$$

maneras posibles de hacerlo. Como no nos importa el orden de las n cajas, hemos de dividir por $n!$. $\square$

Ejemplos

1. ¿De cuántas maneras se pueden emparejar seis personas?
2. Una empresa de ventas tiene que inspeccionar las ventas en 20 ciudades. Se destinan para ello 5 miembros del personal, cada uno de los cuales supervisará 4 ciudades.
   (a) ¿De cuántas maneras se pueden agrupar las ciudades en cinco grupos de cuatro?
   (b) ¿De cuántas maneras se pueden asignar las ciudades a los inspectores?

Proposición 29 *El número de particiones de un conjunto de m elementos del tipo $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ con $\sum_k m_k = m$ es*

$$\binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_n} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{r_k!},$$

donde r_k es el número de partes con k elementos.